1. Формулировка задачи оптимизации поиска равновесных объемов и цен в сетевом аукционе поставщиков и потребителей одного товара с ограничениями на передачу

Рассмотрим рынок. Пусть на рынке спрос соответсвует V. Каждый поставщик на рынке характеризуется следующими параметрами: V_i - объем поставки, c_i - цена за товар i-го поставщика. Заявки поставщиков упорядочиваются по возрастанию: $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$.

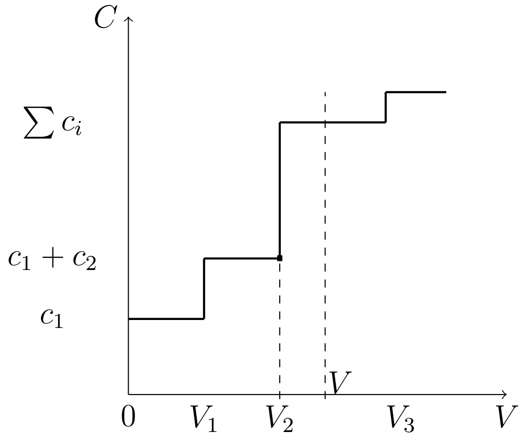

Рис. 1: Спрос и предложение

Два основных подхода:
1) Маржинальное ценообразование: выбирается максимальная цена, объем которой был выбран рынком (c_k) (Рис.2)

$$\widehat{V}_k = V - \sum_{i=1}^{k-1} V_i,$$

$$c_k,$$

$$\widehat{V}_k \leq V_k.$$

2) Ценообразование по заявке: цены соответствуют заявкам. (Рис.3)

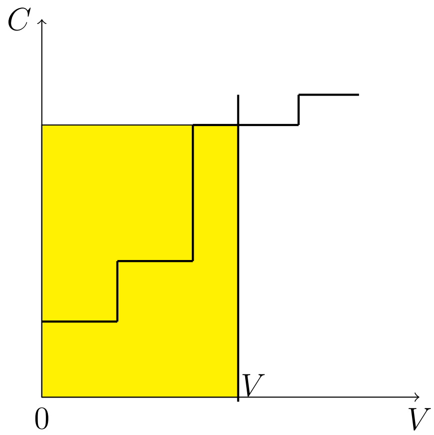

Рис. 2: Маржинальное ценообразование

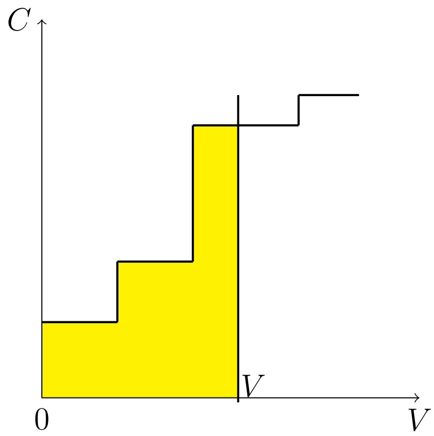

Рис. 3: Ценообразование по заявке

Пусть x_i - объем поставщика i. Ставится следующая задача оптимизации:

$$\begin{cases} \min_x \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \\ 0 \leq x_i \leq V_i, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = V. \end{cases}$$

Решение этой задачи - это решение аукциона маржинальной цены - множителем Лагранжа (wtf?).

Пусть x_i - объем, принятый у i-го поставщика, $x_i \in [0; V_i]$. Им соответствуют цены

$p_i, i = \overline{1,n}$. Тогда задача оптимизации следующая:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min_{x\in\mathbb{R}}^{n}, \\ x_i \le V_i, (\pi_i^+), \\ 0 \le x_i, (\pi_i^+), \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = V_c, (\lambda_0). \end{cases}$$

В скобках помечены множители Лагранжа, соответствующие ограничениям задачи, каждый из них - неотрицательное число. Так как поставщиков n, то ограничений $2n+1$ (для первого и второго по n, плюс третье).

Таким образом, можем составить функцию Лагранжа для нашей задачи оптимизации:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x),$$

$$L(x,\lambda_0,\pi) =< p, x > +\lambda_0(< e, x > -V_c) + \sum_{i=1}^{n}(< e_i, x > -V_i)\pi_i^+ - \sum_{i=1}^{n}(< e_i, x >)\pi_i^-,$$

где $\lambda_0 \ge 0, \pi_i^+ \ge 0, \pi_i^- \ge 0$.
Теорема (Куна-Таккера): для того чтобы пара векторов p^*, x^* являлась решением задачи оптимизации необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $\lambda_0^* \ge 0, \pi_i^* \ge 0$, что $(x^*, \lambda_0^*, \pi^*)$ являлась седловой точкой функции Лагранжа соответствующей задачи.
Ищем седловую точку функции Лагранжа. Для этого берем производную.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\pi)}{\partial x_i} = p_i + \lambda_0 + \pi_i^+ - \pi_i^- = 0, \\ (< e_i, x > -V_i)\pi_i^+ = 0, \\ (x_i - V_i)\pi_i^+ = 0, \\ x_i\pi_i^- = 0. \end{cases}$$

Поясним смысл множителей Лагранжа: $-\lambda_0$ - равномерная маржинальная ценая аукциона, π_i^+ - прибыль i-го поставщика, π_i^- - убыток i-го поставщика. Из системы получаем следующее выражение:

$$p_i + \pi_i^+ - \pi_i^- = -\lambda_0.$$

Пусть $x_i^* > 0$. Тогда из четвертого уравнения системы получаем, что $\pi_i^{*-} = 0$ и соответственно $p_i + \pi_i^+ = -\lambda_0$.
Пусть $x_i^* = 0$. Тогда из третьего и четвертого уравнения системы получаем, что $\pi_i^* = 0$ и соответственно $p_i = -\lambda_0$.
$x_i \in [0; V_i]$, $\frac{d}{dV_c} < p, x(V_c) >= -\lambda_0(V_c)$, где $-\lambda_0(V_c)$ показывает чувствительность.